

ETS 2002

Correction

EXERCICE 1 :

1° :

X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0,28$:

$$a) P(A) = P(X = 0) = \frac{e^{-0,28} 0,28^0}{0!} = e^{-0,28} \approx 0,756.$$

b)

$$P(B) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-0,28} + \frac{e^{-0,28} 0,28^1}{1!} + \frac{e^{-0,28} 0,28^2}{2!} \approx 0,997.$$

2° :

a) Y suit une loi Binomiale car :

- deux issues possibles : sinistre ou pas ;
- 15 épreuves aléatoires indépendantes ;
- même probabilité de succès ($p=0,6$) à chaque épreuve.

Les paramètres de cette loi sont : $n=15$ et $p=0,6$.

$$b) P(Y = 10) = C_{15}^{10} 0,6^{10} 0,4^5 = 3003 \times 0,6^{10} \times 0,4^5 \approx 0,186.$$

3° :

C suit une loi Normale de moyenne $m = 1200$ et d'écart type $\sigma = 200$:

On se ramène à la loi normale centrée réduite $N(0 ; 1)$ par le changement

de variable suivant : $T = \frac{C - m}{\sigma}$.

$$P(1000 \leq C \leq 1500) = P\left(\frac{1000 - 1200}{200} \leq T \leq \frac{1500 - 1200}{200}\right) = P(-1 \leq T \leq 1,5) =$$

$$\Pi(1,5) - \Pi(-1) = \Pi(1,5) - [1 - \Pi(1)] = \Pi(1,5) - 1 + \Pi(1) = 0,9332 - 1 + 0,8413 = 0,7745 \approx 0,775.$$

4° :

$$a) p = \frac{91}{100} = 0,91.$$

b) Un coefficient de confiance de 95% correspond à une valeur de t de 1,96.

L'intervalle de confiance est alors défini par la formule suivante :

$$\left[p - 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{100-1}}; p + 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{100-1}} \right] = \left[0,91 - 1,96 \sqrt{\frac{0,91 \times 0,09}{99}}; 0,91 + 1,96 \sqrt{\frac{0,91 \times 0,09}{99}} \right] \\ = [0,854; 0,966]$$

c) Non car on a 5% de « chance » qu'il ne soit pas dans l'intervalle !

EXERCICE 2 :

A. Résolution d'une équation différentielle :

1° :

$$(E_0) : y'' - y' - 2y = 0$$

$$(EC) : r^2 - r - 2 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2; \quad r_2 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1.$$

Les solutions générales de (E_0) sont de la forme : $y_1(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$ avec C_1, C_2 nombres réels.

2° :

h est une solution particulière de (E) si et seulement si : $h'' - h' - 2h = (-6x - 4)e^{-x}$.

Il nous faut donc calculer h' , puis h'' :

$$h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$$

$$U = x^2 + 2x \quad U' = 2x + 2$$

$$V = e^{-x} \quad V' = -e^{-x}$$

$$h'(x) = U'V + UV' = (2x + 2)e^{-x} + (x^2 + 2x)(-e^{-x}) = e^{-x}(2x + 2 - x^2 - 2x) = e^{-x}(-x^2 + 2).$$

$$h'(x) = e^{-x}(-x^2 + 2)$$

$$U = e^{-x} \quad U' = -e^{-x}$$

$$V = -x^2 + 2 \quad V' = -2x$$

$$h''(x) = U'V + UV' = (-e^{-x})(-x^2 + 2) + e^{-x}(-2x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 2).$$

On remplace tout cela dans le premier membre de (E) :

$$h'' - h' - 2h = e^{-x}[(x^2 - 2x - 2) - (-x^2 + 2) - 2(x^2 + 2x)] = e^{-x}[x^2 - 2x - 2 + x^2 - 2 - 2x^2 - 4x] = e^{-x}(-6x - 4).$$

Donc h est bien une solution particulière de (E) .

3° :

Il suffit d'additionner les deux fonctions trouvées précédemment :

$$y(x) = y_1(x) + h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x}.$$

4° :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{conditions initiales qui vont permettre de trouver la valeur des deux}$$

constantes C_1 et C_2 .

$$y(0) = C_1 e^{2 \times 0} + C_2 e^{-0} + (0^2 + 2 \times 0) e^{-0} = C_1 + C_2$$

$$C_1 + C_2 = 1 \quad (1)$$

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + (-x^2 + 2) e^{-x}$$

$$y'(0) = 2C_1 e^{2 \times 0} - C_2 e^{-0} + (-0^2 + 2) e^{-0} = 2C_1 - C_2 + 2$$

$$2C_1 - C_2 + 2 = 1$$

$$2C_1 - C_2 = -1 \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) forment un système d'équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 - C_2 = -1 \end{cases} \quad \text{on additionne les deux équations et on obtient :}$$

$$3C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

$$C_2 = 1 - C_1 = 1 - 0 = 1$$

$$\text{d'où } f(x) = e^{-x} + (x^2 + 2x) e^{-x} = (x^2 + 2x + 1) e^{-x} = (x + 1)^2 e^{-x}.$$

B. Etude d'une fonction :

1° :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1)^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0^+ \quad \text{c'est une forme indéterminée mais la}$$

fonction exponentielle est prioritaire devant la fonction polynôme donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+.$$

c) La limite obtenue au b) traduit géométriquement la présence d'une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=0$.

2° :

a)

$$f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$$

$$U = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \quad U' = 2x + 2$$

$$V = e^{-x} \quad V' = -e^{-x}$$

$$f'(x) = U'V + UV' = (2x + 2) \times e^{-x} + (x + 1)^2 \times (-e^{-x}) = e^{-x} (2x + 2 - (x + 1)^2)$$

$$= e^{-x} (2x + 2 - x^2 - 2x - 1) = e^{-x} (-x^2 + 1).$$

$$\text{b) } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 \geq 0 \quad \text{car } e^{-x} > 0 \quad \text{pour tout } x \text{ réel,}$$

$$-x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 \geq -1 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

c) Tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
Sign(f'(x))	-	0	+	0	-		
f	$+\infty$		0		$4e^{-1}$		0^+

3° :

a) DL d'ordre 2 par le formulaire : $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + t^2 \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

On change de variable : t en -x et on obtient :

$$e^{-x} = 1 + \frac{-x}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + (-x)^2 \varepsilon(-x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$e^{-x} = 1 + \frac{-x}{1} + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(-x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon'(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon'(x) = 0$$

b) On reconstruit à partir du DL précédent la fonction f en multipliant la partie régulière par $(x+1)^2$:

$$e^{-x}(x+1)^2 = \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)(x+1)^2 + x^2 \varepsilon'(x) = \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)(x^2 + 2x + 1) + x^2 \varepsilon'(x)$$

$$f(x) = x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} + 2x - 2x^2 + x^3 + 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon'(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon'(x) = 0$$

$$f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon'(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon'(x) = 0.$$

c) Equation de la tangente T_0 : $y = 1 + x$.

L'étude du signe de $-\frac{x^2}{2}$ va nous indiquer les positions de C et T_0 .

Quand $x < 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} < 0$ C est au dessous de T

Quand $x = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} = 0$ C intercepte T

Quand $x > 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{2} < 0$ C est au dessous de T.

C. Calcul intégral :

1° :

a) f est solution de (E) donc on peut écrire :

$$f'' - f' - 2f = (-6x - 4)e^{-x} \Rightarrow -2f = -f'' + f' + (-6x - 4)e^{-x}$$

$$f = -\frac{1}{2}(-f'' + f' + (-6x - 4)e^{-x})$$

$$f = \frac{1}{2}(f'' - f' + (6x + 4)e^{-x})$$

b) Si F est une primitive de f alors on doit démontrer $F' = f$:

$$F(x) = \frac{1}{2}(f'' - f' + (6x + 10)e^{-x})$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}(f'' - f' - (-6x - 10 + 6)e^{-x})$$

car la dérivée de $(6x + 10)e^{-x}$ se fait par $(UV)' = U'V + UV'$

$$\text{avec } \begin{array}{ll} U = 6x + 10 & U' = 6 \\ V = e^{-x} & V' = -e^{-x} \end{array}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}(f'' - f' - (-6x - 4)e^{-x}) = f(x).$$

c) En remplaçant par la valeur des fonctions, on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{2}[e^{-x}(-x^2 + 1) - (x + 1)^2 e^{-x} - (6x + 10)e^{-x}]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}[e^{-x}(-x^2 + 1 - x^2 - 2x - 1 - 6x - 10)]$$

$$F(x) = \frac{1}{2}[e^{-x}(-2x^2 - 8x - 10)] = e^{-x}(-x^2 - 4x - 5).$$

2° :

$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx = [F(x)]_{-1}^0 = (-0^2 - 4 \times 0 - 5)e^{-0} - (-(-1)^2 - 4 \times (-1) - 5)e^{-(-1)} = -5 + 2e \text{ u.a.}$$

On peut raisonner en faisant une **intégration par parties** (même si cela n'était pas demandé, on peut alors ne pas avoir fait les questions précédentes) :

$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x + 1)^2 e^{-x} dx$$

On choisit alors :

$$\begin{array}{ll} U = (x + 1)^2 & U' = 2x + 2 \\ V' = e^{-x} & V = \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x} \end{array}$$

La formule donne :

$$A = [(x + 1)^2 (-e^{-x})]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (2x + 2)(-e^{-x}) dx$$

$$A = [(x + 1)^2 (-e^{-x})]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 (2x + 2)(e^{-x}) dx$$

On recommence une intégration par parties sur la deuxième intégrale

$$B = \int_{-1}^0 (2x+2)(e^{-x}) dx$$

$$U = 2x+2 \quad U' = 2$$

$$V' = e^{-x} \quad V = -e^{-x}$$

$$B = \left[(2x+2)(-e^{-x}) \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2(-e^{-x}) dx$$

$$B = \left[(2x+2)(-e^{-x}) \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 2(e^{-x}) dx$$

$$= \left[(2x+2)(-e^{-x}) \right]_{-1}^0 + \left[-2e^{-x} \right]_{-1}^0 = (2(-e^0)) - (0(-e^1)) + (-2e^0) - (-2e^1) = -2 - 2 + 2e = -4 + 2e$$

On reprend le calcul avec A :

$$A = \left[(x+1)^2(-e^{-x}) \right]_{-1}^0 - 4 + 2e$$

$$A = (1(-e^0)) - (0(-e^1)) - 4 + 2e = -1 - 4 + 2e = -5 + 2e.$$